Andrei Gheorghe

NUMERE COMPLEXE

partea a II-a

Biblioteca Olimpiadelor
de
Matematică

57

Editura GIL
Zalău - 2024

Cuprins

Proprietăți

1. $\mathbb{C} = \{z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$;

2. a) $z_1 = a_1 + ib_1,\ z_2 = a_2 + ib_2$, atunci $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$;

b) $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$;

c) $z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$;

3. $z = a + ib,\ \overline{z} = a - ib$;

4. $a = \operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$;

5. $b = \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$;

6. $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z,\ \forall z \in \mathbb{C}$;

7. $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \overline{z},\ \operatorname{Im} \overline{z} = -\operatorname{Im} z$;

8. $\operatorname{Re}(-z) = -\operatorname{Re} z;\ \operatorname{Im}(-z) = -\operatorname{Im} z$;

9. $\operatorname{Re} z > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \dfrac{1}{z} > 0$;

10. $\operatorname{Im} z > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} \dfrac{1}{z} < 0$;

11. $\operatorname{Re} \alpha z = \alpha \operatorname{Re} z;\ \operatorname{Im} \alpha z = \alpha \operatorname{Im} z,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{C}$;

12. $|\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$;

13. $\operatorname{Re} \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{|z|^2} \operatorname{Re} z;\ \operatorname{Im} \dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{|z|^2} \operatorname{Im} z$;

14. $\operatorname{Re} iz = -\operatorname{Im} z,\ \operatorname{Im} iz = \operatorname{Re} z$;

15. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|,\ |\operatorname{Im} z| \leq |z|$;

16. $z = a + ib \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = z$;

17. $E(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} E = 0 \Leftrightarrow \overline{E(z)} = E(z)$, ($E(z)$ o expresie de z);

18. $z = a + ib \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow a = 0, b \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \neq 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z,\ z \neq 0$;

19. $E(z) \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \operatorname{Re} E(z) = 0,\ \operatorname{Im} E(z) \neq 0 \Leftrightarrow \overline{E} = -E,\ E \neq 0$;

20. $|z| = |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = r > 0,\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ (|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$;

21. $z\overline{z} = |z|^2 = r^2,\ \overline{z} = \dfrac{r^2}{z};\ |E(z)|^2 = E(z)\overline{E(z)}$;

22. $\overline{\alpha z} = \alpha \overline{z},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{C}$;

23. $\overline{\overline{z}} = z,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \left(\overline{\overline{E(z)}}\right) = E(z)$;

24. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; $\overline{\dfrac{z_1}{z_2}} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$;

25. $\overline{\sum\limits_{k=1}^{n} z_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{z_k}$; $\overline{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k z_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{z_k}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$;

26. Fie $x + iy = \sqrt[n+1]{a + ib}$ şi $y + ix = \sqrt[n]{a' + ib'}$. Să se arate că $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{a'^2 + b'^2}$.

27. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\overline{z^m} = (\overline{z})^m$, $\forall m \in \mathbb{Z}^*$, $z \neq 0$;

28. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$;

29. $\left|\prod\limits_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod\limits_{k=1}^{n} |z_k|$, $z_k \in \mathbb{C}^*$, $k = \overline{1, n}$; $\left|\prod\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k\right| = \prod\limits_{k=1}^{n} z_k$ unde $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$;

30. a) $|z^n| = |z|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) $|z^m| = |z|^m$, $\forall m \in \mathbb{Z}^*$, $z \neq 0$;

31. $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{ib}{a^2 + b^2} = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} - \dfrac{i \operatorname{Im} z}{|z|^2}$;

32. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

33. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \exists \alpha > 0$ astfel încât $z_2 = \alpha z_1$;

34. $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$, unde $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$;

35. $\operatorname{Im} \overline{z} = \operatorname{Im} z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} \overline{E(z)} = \operatorname{Im} E(z) \in \mathbb{R}$;

36. $A = u\overline{v} + \overline{u}v \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in \mathbb{C}$;

$B = u\overline{v} - \overline{u}v \in i\mathbb{R}^*$, $\forall u, v \in \mathbb{C}$;

37. $A = \operatorname{Re} z_1 z_2 = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

$B = \operatorname{Im} z_1 z_2 = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Re} z_2 \operatorname{Im} z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

38. $A = \operatorname{Re} \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Im}_1 \operatorname{Im} z_2}{|z_2|^2}$;

$B = \operatorname{Im} \dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{\operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 - \operatorname{Re} z_2 \operatorname{Im} z_1}{|z_2|^2}$;

39. $\operatorname{Re} z^n = |z|^n \cos(n \arg z)$

$\operatorname{Im} z^n = |z|^n \sin(n \arg z)$

40. $\operatorname{Re}^2(z_1 z_2) + \operatorname{Im}^2(z_1 z_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$.

Proprietăţi ale rădăcinilor ecuaţiilor

$z^2+1=0$; $z^2+z+1=0$; $z^2-z+1=0$

1. a) $z^2+1=0 \Leftrightarrow z\in\{i,-i\}$;
b) $i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$;
c) $i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$;
d) $(1+i)^2=2i,\ (1-i)^2=-2i$.

2. a) $z^2+z+1=0,\ z_{1,2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$; $\{z_1,z_2\}=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$;
b) $z^2+z+1=(z-\varepsilon)(x-\overline{\varepsilon})$;
c) $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0,\ \overline{\varepsilon}^2+\overline{\varepsilon}+1=0$;
d) $\overline{\varepsilon}=\varepsilon^2$;
e) $\varepsilon^3=1,\ \varepsilon^{3k}=1,\ \forall k\in\mathbb{Z}^*$;
f) $\varepsilon+\overline{\varepsilon}=-1,\ \varepsilon\cdot\overline{\varepsilon}=1$;
g) $|\varepsilon|=|\overline{\varepsilon}|=1$.

3. a) $z^2-z+1=0,\ z_2=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$; $\{z_1,z_2\}=\{\omega,\overline{\omega}\}$;
b) $\omega^2-\omega+1=0,\ \overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$;
c) $z^2-z+1=(z-\omega)(z-\overline{\omega})$;
d) $\overline{\omega}=-\omega^2,\ \omega=-\varepsilon, \{\omega,\overline{\omega}\}=\{-\varepsilon,-\overline{\varepsilon}\}$;
e) $\omega^3=-1,\ \omega^{3k}=(-1)^k, k\in\mathbb{N}^*$;
f) $\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$;
g) $|\omega|=|\overline{\omega}|=1$.

Forma trigonometrică a numerelor complexe

1. $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$ unde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Numerele r şi θ se numesc coordonatele polare ale punctului $M(a, b)$ sau $M(z)$;

2. $\theta = \arg z \in [0, 2\pi)$, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

3. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z \in \{0, \pi\}$;

$z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$;

4. $\arg(z_1 z_2) = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2; & \arg z_1 + \arg z_2 \in [0, 2\pi) \\ \arg z_1 + \arg z_2 - 2\pi; & \arg z_1 + \arg z_2 \in [2\pi, 4\pi) \end{cases}$ sau

$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 - 2k\pi, k \in \{0, 1\}$, k se alege astfel încât membrul drept să aparţină $[0, 2\pi)$ sau $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$, $(\bmod 2\pi)$;

5. $\arg(-z) = \begin{cases} \pi + \arg z, & \theta = \arg z \in [0, \pi) \\ -\pi + \arg z, & \theta = \arg z \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$

(dacă $z = 0 \Rightarrow r = 0, \arg z$ nedeterminat);

6. Dacă $z_2 = \alpha z_1$, atunci $\begin{cases} \arg z_2 = \arg z_1, \alpha > 0 \\ \arg z_2 = \pi + \arg z_1, \alpha < 0 \end{cases}$

7. a. $\arg \overline{z} = 2\pi - \arg z \Leftrightarrow \arg \overline{z} + \arg z = 2\pi$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$ sau $\arg \overline{z} = -\arg z$, $(\bmod 2\pi)$ $\forall z \in \mathbb{C}$;

b. $\arg z = -\arg z$ $(\bmod 2\pi)$ $\forall z \in \mathbb{C}^*$;

c. $\arg z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0$ şi $\operatorname{Re} z > 0$;

d. $\arg z = \pi \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0$ şi $\operatorname{Re} z < 0$.

8. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

$\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] = re^{-i\theta} =$

$= r[\cos(2\pi - \theta) + i\sin(2\pi - \theta)]$;

9. $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$;

10. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$;

11. $\prod_{k=1}^{n} z_k = \prod_{k=1}^{n} r_k (\cos\theta_k + i\sin\theta_k) = \prod_{k=1}^{n} r_k \left[\cos\left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k\right) + i\sin\left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k\right)\right]$;

12. $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta = e^{in\theta}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n[\cos n\theta + i\sin n\theta] = r^n e^{in\theta}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

(Formula lui Moivre)

13. $(\cos\theta - i\sin\theta)^h = \cos n\theta - i\sin n\theta, n \in \mathbb{Z}^*$;

14. $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m = r^m[\cos m\theta + i\sin m\theta]$, $\forall m \in \mathbb{Z}^*$;

15. Fie $z = a + ib$, atunci $\arg z = arctg\frac{b}{a} + k\pi$, unde

$$k = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a > 0, b > 0 \\ 1, & \text{dacă } a < 0 \\ 2, & \text{dacă } a > 0, b < 0 \end{cases} \qquad \text{sau } \theta = \arg z \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & a > 0, b > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|, & a < 0, b < 0 \\ \pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|, & a < 0, b > 0 \\ 2\pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|, & a > 0, b < 0 \end{cases}$$

16. $1 = \cos 0 + i\sin 0$

$-1 = \cos\pi + i\sin\pi$

$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

17. $z = a > 0 \Rightarrow z = a(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = a < 0 \Rightarrow z = |a|(\cos\pi + i\sin\pi)$

$z = ib, b > 0 \Rightarrow z = b\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$z = ib, b < 0 \Rightarrow z = |b|\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

18. Ecuaţia binomă

$z^n = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow$

$\Rightarrow z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{\pi} + i\sin\frac{\theta}{\pi}\right)\varepsilon_k, k = \overline{0, n-1}.$

19. $z^n = 1 \Leftrightarrow z_k = \varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \varepsilon_1^k = \varepsilon^k, k = \overline{0, n-1}$ $\varepsilon_k^n = 1$ şi $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k = \varepsilon^k$ (unde $\varepsilon = \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ rădăcina primitivă a unităţii);

20. Mulţimea rădăcinilor unităţii

$$U_n = \{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}\} = \left\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\right\};$$

21. $1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} = 0$ şi $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1} = (-1)^{n-1}$, $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i^p = 0, p = 1, 2, \ldots, n-1$;

(Sumele lui Newton)

22. Fie $z = \cos\theta + i\sin\theta$, atunci

$$\cos n\theta = \frac{z^{2n} + 1}{2z^n}, \sin n\theta = \frac{z^{2n} - 1}{2iz^n}; \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Partea I

Enunţuri

Capitolul 1

Egalităţi

1.1 Egalităţi de o variabilă complexă

§1.A.

1. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z^2 = -3 + 4i$. Să se calculeze:
a) $A = z^2 + z^{-2}$;
b) $B = \left| z - \dfrac{1}{\overline{z}} \right|$;
c) $z + \dfrac{1}{\overline{z}}$;
d) $D = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$.

2. Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ cu proprietatea: $i\dfrac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R}$. Determinaţi $|z|$.

3. Fie ε o rădăcină cubică complexă a unităţii. Să se demonstreze

$$|z-1|^2 + |z-\varepsilon|^2 + \left|z-\varepsilon^2\right|^2 = 3\left(|z|^2+1\right).$$

4. Fie ε o rădăcină cubică complexă a unităţii. Să se demonstreze

$$|z+u|^2 + |z+\varepsilon u|^2 + \left|z+\varepsilon^2 u\right|^2 = 3\left(|z|^2+|u|^2\right)$$

oricare ar fi $z, u \in \mathbb{C}$.

5. Fie $a \in \mathbb{C}$ cu $|a| = 1$. Să se arate că oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$, atunci $|z-a| = |1-\overline{a}z|$.

6. Să se arate că pentru orice $z \in \mathbb{C}$ are loc relația

$$\left|z+\frac{1}{2}\right|^2 + i\left|z+\frac{i}{2}\right|^2 - (1+i)\,|z|^2 - \frac{1}{4}(1+i) = z.$$

7. Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ cu $|z| = 1$ atunci există $c \in \mathbb{R}$ cu $z = \dfrac{c+i}{c-i}$.

8. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z-a| = \sqrt{a^2-b^2}, a > b > 0$. Să se arate că

$$\left|\frac{z-b}{z+b}\right| = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

9. Arătați că dacă $z \in \mathbb{C}$, astfel încât $|z-i|, |z|, |z+i|$ sunt în progresie aritmetică, atunci z este un număr pur imaginar.

10. Fie $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = r > 0$. Arătați că: $|z-r|^2 + |z+r|^2 + |z-ir| + |z+ir|^2 = 8r^2$.

11. Dacă $z \in \mathbb{C}$, atunci

$$|2z+1|^2 + |2\overline{z}+1|^2 + i\left(|2z+i|^2 + |2\overline{z}+i|^2\right) = 8(1+i)\,|z|^2 + 2(1+i) + 8\,\mathrm{Re}\, z.$$

12. Fie $u = \dfrac{z+|z|}{\overline{z}+|z|}$ cu $z \in \mathbb{C}^*$ și $\overline{z}+|z| \neq 0$.

α) Să se determine $|u|$;

β) Să se determine z dacă u este real.

α) a) $|u| = 2$; b) $|u| = \dfrac{1}{2}$; c) $|u| = 1$; d) $|u| = -1$.

β) a) $z \in \mathbb{R}^*$; b) $z = x < 0$; c) $z = ix, x \in \mathbb{R}^*$; d) $z = x > 0$.

13. Fie $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$ și $\mathrm{Im}\, z > 0$. Să se arate că $|z+1| + |z-1| = \sqrt{2}\,|z+i|$. Să se dea o interpretare geometrică.

14. Fie $z \in \mathbb{C}^*$ cu $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Să se determine modulul și argumentul numărului complex $Z = z - \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\overline{z}$.

15. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a, b > 0$ și $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $u = az + \dfrac{b}{z} \in \mathbb{R}$. Arătați că $|z| = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

16. Fie $u \in \mathbb{C}$. Să se arate că $|\sqrt{u}|^2 = |u|$.

17. Dacă $x \in \mathbb{R}$ şi $z \in \mathbb{C}$, atunci $|z \sin x - \overline{z} \cos x|^2 + |z \sin x + \overline{z} \cos x|^2 = 2|z|^2$.

18. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$. Să se arate că:

$$(z-a)(z-b)(a-b) + (z-b)(z-c)(b-c) + (z-c)(z-a)(c-a) =$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a), \text{ oricare ar fi } z \in \mathbb{C}.$$

19. Să se demonstreze că pentru $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, există $\lambda \in \mathbb{R}$ unic, astfel încât

$$z = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}.$$

20. Fie $z \in \mathbb{C}$ şi $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $b \neq \pm a$. Să se arate că:

$$\frac{b-a}{|z-b| + |z-a|} = \frac{|z-b| - |z-a|}{b+a} \text{ dacă şi numai dacă } z \in i\mathbb{R}^*.$$

21. a) Fie $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că ecuaţia $\frac{x+ia}{x+ib} = \varepsilon$ are soluţie reală $\Leftrightarrow a + b = 0$;
b) Să se arate: $(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2) \cdot (1+\varepsilon^2) \ldots (1+\varepsilon^k) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n \left| \frac{k(k+1)}{2} \right.$, unde n impar.

22. Fie $z \in \mathbb{C}$ şi $a, b \in \mathbb{R}$, atunci are loc egalitatea:

$$|az - b\overline{z}|^2 + |a\overline{z} - bz|^2 + |az + b\overline{z}|^2 + |a\overline{z} + bz|^2 = 2\left(a^2+b^2\right)\left(|z|^2 + |\overline{z}|^2\right) = 4\left(a^2+b^2\right)|z|^2.$$

23. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ şi $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că:

$$|az - b\overline{z}|^2 + |az + b\overline{z}|^2 + |bz - c\overline{z}|^2 + |bz + c\overline{z}|^2 + |cz - a\overline{z}|^2 + |cz + a\overline{z}|^2 = 4\left(a^2+b^2+c^2\right)|z|^2.$$

Generalizare.

$\S$ 1.**B.**

24. Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că: $1 + 2|z|^2 = 2|z+1|^2 + |z^2+1|^2 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$.