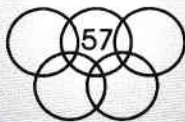


Andrei Gheorghe

NUMERE COMPLEXE
partea a II-a

**Biblioteca Olimpiadelor
de
Matematică**



**Editura GIL
Zalău - 2024**

Cuprins

| | |
|---|------------|
| Introducere | 9 |
| Proprietăți | 13 |
| Proprietăți ale rădăcinilor ecuațiilor | 15 |
| Forma trigonometrică a numerelor complexe | 16 |
| | |
| I Enunțuri | 19 |
| | |
| 1 Egalități | 21 |
| 1.1 Egalități de o variabilă complexă | 21 |
| 1.2 Egalități de două variabile complexe | 28 |
| 1.3 Egalități în trei variabile complexe | 39 |
| 1.4 Egalități cu patru variabile complexe | 59 |
| 1.5 Egalități cu n variabile complexe | 65 |
| | |
| 2 Partea reală și partea imaginară a unei expresii | 77 |
| 2.1 § 1. Nivel A | 77 |
| 2.2 § 2. Nivel B | 85 |
| 2.3 § 3. Nivel C | 93 |
| 2.4 § 4. Sume și produse cu n variabile complexe | 97 |
| | |
| 3 Inegalități în care intervin $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ | 103 |
| 3.1 § 1. Inegalități | 103 |
| 3.2 § 2. Inegalități cu sume | 110 |
| | |
| 4 Mulțimi de numere complexe | 115 |
| 4.1 § 1. Nivel standard - mediu | 115 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 4.2 | § 2. Nivel mediu | 120 |
| 4.3 | § 3. Nivel mediu - avansat 1 | 123 |
| 4.4 | § 4. Nivel mediu - avansat 2 | 126 |
| 4.5 | § 5. Nivel avansat | 128 |
| 5 | Șiruri în numere complexe | 135 |
| 6 | Numere complexe în sume de două combinări | 141 |
| 7 | Unele aplicații ale numerelor complexe în trigonometrie | 149 |
| 7.1 | § 1. Calculul unor expresii trigonometrice cu utilizarea numerelor complexe | 149 |
| 7.2 | § 2. Sume și produse trigonometrice calculate cu ajutorul numerelor complexe | 153 |
| 8 | Determinări de numere complexe în condiții date | 163 |
| 8.1 | § 1. Aplicații în care apare o variabilă complexă | 163 |
| 8.2 | § 2. Aplicații în care apar două variabile complexe | 168 |
| 8.3 | § 3. Aplicații în care apar trei variabile complexe | 170 |
| 8.4 | § 4. Aplicații în care apar n variabile complexe | 173 |
| II | Soluții | 175 |
| 1 | Egalități | 177 |
| 1.1 | Egalități cu o variabilă complexă | 177 |
| 1.2 | Egalități de două variabile complexe | 195 |
| 1.3 | Egalități de trei variabile complexe | 220 |
| 1.4 | Egalități de patru variabile complexe | 271 |
| 1.5 | Egalități cu n variabile complexe | 284 |
| 2 | Partea reală și partea imaginară a unei expresii | 315 |
| 2.1 | § 1. Nivel A. | 315 |
| 2.2 | § 2. Nivel B. | 327 |
| 2.3 | § 3. Nivel C | 349 |
| 2.4 | § 4. Sume și produse cu n variabile complexe | 364 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3 | Inegalități în care intervin $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ | 377 |
| 3.1 | § 1. Inegalități | 377 |
| 3.2 | § 2. Inegalități cu sume | 396 |
| 4 | Mulțimi de numere complexe | 407 |
| 4.1 | § 1. Nivel standard - mediu | 407 |
| 4.2 | § 2. Nivel mediu | 418 |
| 4.3 | § 3. Nivel mediu - avansat 1 | 425 |
| 4.4 | § 4. Nivel mediu - avansat 2 | 431 |
| 4.5 | § 5. Nivel avansat | 433 |
| 5 | Șiruri în numere complexe | 453 |
| 6 | Numere complexe în sume de două combinații | 473 |
| 7 | Unele aplicații ale numerelor complexe în trigonometrie | 491 |
| 7.1 | § 1. Calculul unor expresii trigonometrice cu utilizarea numerelor complexe | 491 |
| 7.2 | § 2. Sume și produse trigonometrice calculate cu ajutorul numerelor complexe | 504 |
| 8 | Determinări de numere complexe în condiții date | 527 |
| 8.1 | § 1. Aplicații în care apare o variabilă complexă | 527 |
| 8.2 | § 2. Aplicații în care apar două variabile complexe | 544 |
| 8.3 | § 3. Aplicații în care apar trei variabile complexe | 551 |
| 8.4 | § 4. Aplicații în care apar n variabile complexe | 560 |

Proprietăți

1. $\mathbb{C} = \{z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$;
2. a) $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$, atunci $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$;
- b) $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$;
- c) $z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$;
3. $z = a + ib, \bar{z} = a - ib$;
4. $a = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$;
5. $b = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
6. $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z, \forall z \in \mathbb{C}$;
7. $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}, \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$;
8. $\operatorname{Re}(-z) = -\operatorname{Re} z; \operatorname{Im}(-z) = -\operatorname{Im} z$;
9. $\operatorname{Re} z > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \frac{1}{z} > 0$;
10. $\operatorname{Im} z > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} \frac{1}{z} < 0$;
11. $\operatorname{Re} \alpha z = \alpha \operatorname{Re} z; \operatorname{Im} \alpha z = \alpha \operatorname{Im} z, \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{C}$;
12. $|\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$;
13. $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \operatorname{Re} z; \operatorname{Im} \frac{1}{z} = -\frac{1}{|z|^2} \operatorname{Im} z$;
14. $\operatorname{Re} iz = -\operatorname{Im} z, \operatorname{Im} iz = \operatorname{Re} z$;
15. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|$;
16. $z = a + ib \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z$;
17. $E(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} E = 0 \Leftrightarrow \overline{E(z)} = E(z), (E(z) \text{ o expresie de } z)$;
18. $z = a + ib \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow a = 0, b \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \neq 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z, z \neq 0$;
19. $E(z) \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \operatorname{Re} E(z) = 0, \operatorname{Im} E(z) \neq 0 \Leftrightarrow \overline{E} = -E, E \neq 0$;
20. $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = r > 0, \forall z \in \mathbb{C}^*, (|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$;
21. $z\bar{z} = |z|^2 = r^2, \bar{z} = \frac{r^2}{z}; |E(z)|^2 = E(z)\overline{E(z)}$;
22. $\overline{\alpha z} = \alpha \bar{z}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{C}$;
23. $\overline{\bar{z}} = z, \forall z \in \mathbb{C}, \overline{\overline{E(z)}} = E(z)$;

24. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$;

25. $\overline{\sum_{k=1}^n z_k} = \sum_{k=1}^n \overline{z_k}$; $\overline{\sum_{k=1}^n \alpha_k z_k} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \overline{z_k}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$;

26. Fie $x + iy = \sqrt[n+1]{a + ib}$ și $y + ix = \sqrt[n]{a' + ib'}$. Să se arate că $x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{a'^2 + b'^2}$.

27. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\overline{z^m} = (\overline{z})^m$, $\forall m \in \mathbb{Z}^*$, $z \neq 0$;

28. $|\overline{z_1 z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$; $\left| \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$;

29. $\left| \prod_{k=1}^n z_k \right| = \prod_{k=1}^n |z_k|$, $z_k \in \mathbb{C}^*$, $k = \overline{1, n}$; $\left| \prod_{k=1}^n \varepsilon_k z_k \right| = \prod_{k=1}^n |z_k|$ unde $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$;

30. a) $|z^n| = |z|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) $|z^m| = |z|^m$, $\forall m \in \mathbb{Z}^*$, $z \neq 0$;

31. $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{ib}{a^2 + b^2} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} - \frac{i \operatorname{Im} z}{|z|^2}$;

32. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

33. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \exists \alpha > 0$ astfel încât $z_2 = \alpha z_1$;

34. $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$, $\left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$, unde $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$;

35. $\operatorname{Im} \overline{z} = \operatorname{Im} z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} \overline{E(z)} = \operatorname{Im} E(z) \in \mathbb{R}$;

36. $A = u\overline{v} + \overline{u}v \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in \mathbb{C}$;

$B = u\overline{v} - \overline{u}v \in i\mathbb{R}^*$, $\forall u, v \in \mathbb{C}$;

37. $A = \operatorname{Re} z_1 z_2 = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

$B = \operatorname{Im} z_1 z_2 = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Re} z_2 \operatorname{Im} z_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

38. $A = \operatorname{Re} \frac{z_1}{z_2} = \frac{\operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2}{|z_2|^2}$;

$B = \operatorname{Im} \frac{z_1}{z_2} = -\frac{\operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 - \operatorname{Re} z_2 \operatorname{Im} z_1}{|z_2|^2}$;

39. $\operatorname{Re} z^n = |z|^n \cos(n \arg z)$

$\operatorname{Im} z^n = |z|^n \sin(n \arg z)$

40. $\operatorname{Re}^2(z_1 z_2) + \operatorname{Im}^2(z_1 z_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$.

Proprietăți ale rădăcinilor ecuațiilor

$$z^2 + 1 = 0; \quad z^2 + z + 1 = 0; \quad z^2 - z + 1 = 0$$

1. a) $z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z \in \{i, -i\};$

b) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1;$

c) $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i;$

d) $(1+i)^2 = 2i, (1-i)^2 = -2i.$

2. a) $z^2 + z + 1 = 0, z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}; \{z_1, z_2\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\};$

b) $z^2 + z + 1 = (z - \varepsilon)(z - \bar{\varepsilon});$

c) $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0, \bar{\varepsilon}^2 + \bar{\varepsilon} + 1 = 0;$

d) $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^2;$

e) $\varepsilon^3 = 1, \varepsilon^{3k} = 1, \forall k \in \mathbb{Z}^*;$

f) $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = -1, \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} = 1;$

g) $|\varepsilon| = |\bar{\varepsilon}| = 1.$

3. a) $z^2 - z + 1 = 0, z_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}; \{z_1, z_2\} = \{\omega, \bar{\omega}\};$

b) $\omega^2 - \omega + 1 = 0, \bar{\omega}^2 - \bar{\omega} + 1 = 0;$

c) $z^2 - z + 1 = (z - \omega)(z - \bar{\omega});$

d) $\bar{\omega} = -\omega^2, \omega = -\bar{\omega}, \{\omega, \bar{\omega}\} = \{-\varepsilon, -\bar{\varepsilon}\};$

e) $\omega^3 = -1, \omega^{3k} = (-1)^k, k \in \mathbb{N}^*;$

f) $\omega + \bar{\omega} = 1, \omega\bar{\omega} = 1;$

g) $|\omega| = |\bar{\omega}| = 1.$

Forma trigonometrică a numerelor complexe

1. $z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ unde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Numerele r și θ se numesc coordonatele polare ale punctului $M(a, b)$ sau $M(z)$;

2. $\theta = \arg z \in [0, 2\pi)$, $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

3. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z \in \{0, \pi\}$;

$$z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\};$$

4. $\arg(z_1 z_2) = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2; & \arg z_1 + \arg z_2 \in [0, 2\pi) \\ \arg z_1 + \arg z_2 - 2\pi; & \arg z_1 + \arg z_2 \in [2\pi, 4\pi) \end{cases}$ sau

$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 - 2k\pi, k \in \{0, 1\}$, k se alege astfel încât membrul drept să aparțină $[0, 2\pi)$ sau $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2, (\text{mod } 2\pi)$;

5. $\arg(-z) = \begin{cases} \pi + \arg z, & \theta = \arg z \in [0, \pi) \\ -\pi + \arg z, & \theta = \arg z \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$

(dacă $z = 0 \Rightarrow r = 0, \arg z$ nedeterminat);

6. Dacă $z_2 = \alpha z_1$, atunci $\begin{cases} \arg z_2 = \arg z_1, & \alpha > 0 \\ \arg z_2 = \pi + \arg z_1, & \alpha < 0 \end{cases}$

7. a. $\arg \bar{z} = 2\pi - \arg z \Leftrightarrow \arg \bar{z} + \arg z = 2\pi, \forall z \in \mathbb{C}^*$ sau $\arg \bar{z} = -\arg z, (\text{mod } 2\pi) \forall z \in \mathbb{C}$;

b. $\arg z = -\arg z (\text{mod } 2\pi) \forall z \in \mathbb{C}^*$;

c. $\arg z = 0 \Leftrightarrow \text{Im } z = 0$ și $\text{Re } z > 0$;

d. $\arg z = \pi \Leftrightarrow \text{Im } z = 0$ și $\text{Re } z < 0$.

8. $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$

$$\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)] = re^{-i\theta} =$$

$$= r[\cos(2\pi - \theta) + i \sin(2\pi - \theta)];$$

9. $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$;

10. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$;

11. $\prod_{k=1}^n z_k = \prod_{k=1}^n r_k (\cos \theta_k + i \sin \theta_k) = \prod_{k=1}^n r_k \left[\cos \left(\sum_{k=1}^n \theta_k \right) + i \sin \left(\sum_{k=1}^n \theta_k \right) \right]$;

12. $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta = e^{in\theta}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n [\cos n\theta + i \sin n\theta] = r^n e^{in\theta}, \forall n \in \mathbb{N}^*;$$

(Formula lui Moivre)

13. $(\cos \theta - i \sin \theta)^h = \cos n\theta - i \sin n\theta, n \in \mathbb{Z}^*$;

14. $[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^m = r^m [\cos m\theta + i \sin m\theta], \forall m \in \mathbb{Z}^*$;

15. Fie $z = a + ib$, atunci $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + k\pi$, unde

$$k = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a > 0, b > 0 \\ 1, & \text{dacă } a < 0 \\ 2, & \text{dacă } a > 0, b < 0 \end{cases} \quad \text{sau } \theta = \arg z \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, & a > 0, b > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \left| \frac{b}{a} \right|, & a < 0, b < 0 \\ \pi - \operatorname{arctg} \left| \frac{b}{a} \right|, & a < 0, b > 0 \\ 2\pi - \operatorname{arctg} \left| \frac{b}{a} \right|, & a > 0, b < 0 \end{cases}$$

16. $1 = \cos 0 + i \sin 0$

$-1 = \cos \pi + i \sin \pi$

$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

$-i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

17. $z = a > 0 \Rightarrow z = a(\cos \theta + i \sin \theta)$

$z = a < 0 \Rightarrow z = |a|(\cos \pi + i \sin \pi)$

$z = ib, b > 0 \Rightarrow z = b\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$

$z = ib, b < 0 \Rightarrow z = |b|\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$

18. Ecuația binomă

$z^n = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow$

$\Rightarrow z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right) \varepsilon_k, k = \overline{0, n-1}$.

19. $z^n = 1 \Leftrightarrow z_k = \varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = \varepsilon_1^k = \varepsilon^k, k = \overline{0, n-1} \varepsilon_k^n = 1$ și

$\varepsilon_k = \varepsilon_1^k = \varepsilon^k$ (unde $\varepsilon = \varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ rădăcina primitivă a unității);

20. Mulțimea rădăcinilor unității

$$U_n = \{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}\};$$

21. $1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1} = 0$ și $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} = (-1)^{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i^p = 0, p = 1, 2, \dots, n-1$;

(Sumele lui Newton)

22. Fie $z = \cos \theta + i \sin \theta$, atunci

$$\cos n\theta = \frac{z^{2n} + 1}{2z^n}, \sin n\theta = \frac{z^{2n} - 1}{2iz^n}; \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Partea I

Enunțuri

Capitolul 1

Egalități

1.1 Egalități de o variabilă complexă

§ 1.A.

1. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z^2 = -3 + 4i$. Să se calculeze:

a) $A = z^2 + z^{-2}$;

b) $B = \left| z - \frac{1}{\bar{z}} \right|$;

c) $z + \frac{1}{\bar{z}}$;

d) $D = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$.

2. Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ cu proprietatea: $i \frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R}$. Determinați $|z|$.

3. Fie ε o rădăcină cubică complexă a unității. Să se demonstreze

$$|z-1|^2 + |z-\varepsilon|^2 + |z-\varepsilon^2|^2 = 3(|z|^2 + 1).$$

4. Fie ε o rădăcină cubică complexă a unității. Să se demonstreze

$$|z+u|^2 + |z+\varepsilon u|^2 + |z+\varepsilon^2 u|^2 = 3(|z|^2 + |u|^2)$$

oricare ar fi $z, u \in \mathbb{C}$.

5. Fie $a \in \mathbb{C}$ cu $|a| = 1$. Să se arate că oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$, atunci $|z-a| = |1-\bar{a}z|$.

6. Să se arate că pentru orice $z \in \mathbb{C}$ are loc relația

$$\left| z + \frac{1}{2} \right|^2 + \left| z + \frac{i}{2} \right|^2 - (1+i)|z|^2 - \frac{1}{4}(1+i) = z.$$

7. Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ cu $|z| = 1$ atunci există $c \in \mathbb{R}$ cu $z = \frac{c+i}{c-i}$.

8. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z-a| = \sqrt{a^2-b^2}$, $a > b > 0$. Să se arate că

$$\left| \frac{z-b}{z+b} \right| = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

9. Arătați că dacă $z \in \mathbb{C}$, astfel încât $|z-i|, |z|, |z+i|$ sunt în progresie aritmetică, atunci z este un număr pur imaginari.

10. Fie $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = r > 0$. Arătați că: $|z-r|^2 + |z+r|^2 + |z-ir|^2 + |z+ir|^2 = 8r^2$.

11. Dacă $z \in \mathbb{C}$, atunci

$$|2z+1|^2 + |2\bar{z}+1|^2 + i(|2z+i|^2 + |2\bar{z}+i|^2) = 8(1+i)|z|^2 + 2(1+i) + 8\operatorname{Re} z.$$

12. Fie $u = \frac{z+|z|}{\bar{z}+|z|}$ cu $z \in \mathbb{C}^*$ și $\bar{z}+|z| \neq 0$.

α) Să se determine $|u|$;

β) Să se determine z dacă u este real.

α) a) $|u| = 2$; b) $|u| = \frac{1}{2}$; c) $|u| = 1$; d) $|u| = -1$.

β) a) $z \in \mathbb{R}^*$; b) $z = x < 0$; c) $z = ix, x \in \mathbb{R}^*$; d) $z = x > 0$.

13. Fie $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$ și $\operatorname{Im} z > 0$. Să se arate că $|z+1| + |z-1| = \sqrt{2}|z+i|$. Să se dea o interpretare geometrică.

14. Fie $z \in \mathbb{C}^*$ cu $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. Să se determine modulul și argumentul numărului complex $Z = z - \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \bar{z}$.

15. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a, b > 0$ și $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $u = az + \frac{b}{z} \in \mathbb{R}$. Arătați că $|z| = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

16. Fie $u \in \mathbb{C}$. Să se arate că $|\sqrt{u}|^2 = |u|$.

17. Dacă $x \in \mathbb{R}$ și $z \in \mathbb{C}$, atunci $|z \sin x - \bar{z} \cos x|^2 + |z \sin x + \bar{z} \cos x|^2 = 2|z|^2$.

18. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$. Să se arate că:

$$\begin{aligned} (z-a)(z-b)(a-b) + (z-b)(z-c)(b-c) + (z-c)(z-a)(c-a) &= \\ &= (a-b)(b-c)(c-a), \text{ oricare ar fi } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

19. Să se demonstreze că pentru $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, există $\lambda \in \mathbb{R}$ unic, astfel încât

$$z = \frac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i}.$$

20. Fie $z \in \mathbb{C}$ și $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $b \neq \pm a$. Să se arate că:

$$\frac{b-a}{|z-b|+|z-a|} = \frac{|z-b|-|z-a|}{b+a} \text{ dacă și numai dacă } z \in i\mathbb{R}^*.$$

21. a) Fie $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că ecuația $\frac{x+ia}{x+ib} = \varepsilon$ are soluție reală $\Leftrightarrow a+b=0$;

b) Să se arate: $(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2) \cdot (1+\varepsilon^2) \dots (1+\varepsilon^k) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n \mid \frac{k(k+1)}{2}$, unde n impar.

22. Fie $z \in \mathbb{C}$ și $a, b \in \mathbb{R}$, atunci are loc egalitatea:

$$|az - b\bar{z}|^2 + |a\bar{z} - bz|^2 + |az + b\bar{z}|^2 + |a\bar{z} + bz|^2 = 2(a^2 + b^2) (|z|^2 + |\bar{z}|^2) = 4(a^2 + b^2) |z|^2.$$

23. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ și $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că:

$$|az - b\bar{z}|^2 + |az + b\bar{z}|^2 + |bz - c\bar{z}|^2 + |bz + c\bar{z}|^2 + |cz - a\bar{z}|^2 + |cz + a\bar{z}|^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2) |z|^2.$$

Generalizare.

§ 1.B.

24. Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că: $1 + 2|z|^2 = 2|z+1|^2 + |z^2+1|^2 \Leftrightarrow z^2+z+1=0$.